FÍSICA MODERNA

PARTE I: FÍSICA RELATIVISTA

Luis Pardillo Vela https://fisicayquimicaluis.wixsite.com/esoybach

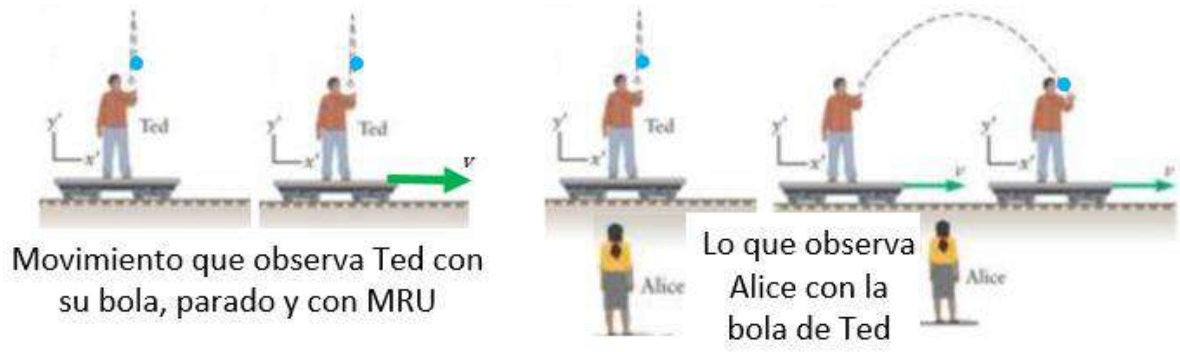
LA RELATIVIDAD DE GALILEO Y NEWTON

Durante el siglo XVII, primero Galileo y luego Newton se plantearon el cómo serían interpretados los movimientos de los cuerpos y las leyes físicas desde el punto de vista de dos observadores que se encontrasen en movimiento relativo uniforme.

La conclusión a la que llegaron ambos científicos fue que:

Las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas de referencias inerciales.

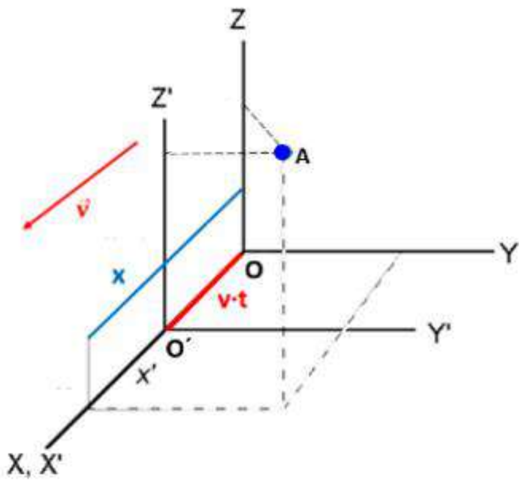
Entendemos por *sistemas de referencia inerciales* aquellos que se encuentra en reposo relativo o en movimiento rectilíneo uniforme.



Transformación galileana de la posición y la distancia.

Tenemos un sistema fijo (Oxyz) y otro (O'x'y'z'), ambos coincidentes en t = 0 , pero este último se mueve con velocidad **v** respecto al fijo manteniéndose paralelos los ejes de ambos y moviéndose en dirección Ox, de modo que, en un instante cualquiera t, la distancia entre O y O´ será OO´ = vt (figura derecha).

La cuestión que ahora nos planteamos es cómo se relacionan las posiciones relativas del punto **A** en ambos sistemas de referencia.



Para t = 0 tenemos que O y O' coinciden, y sean (x, y, z) las coordenadas de un punto **A** en el sistema fijo, y (x', y', z') para el sistema móvil, siendo **v** el módulo de la velocidad de desplazamiento del sistema O'x'y'z'

Las ecuaciones de transformación de las coordenadas podemos comprobar en la figura que son:

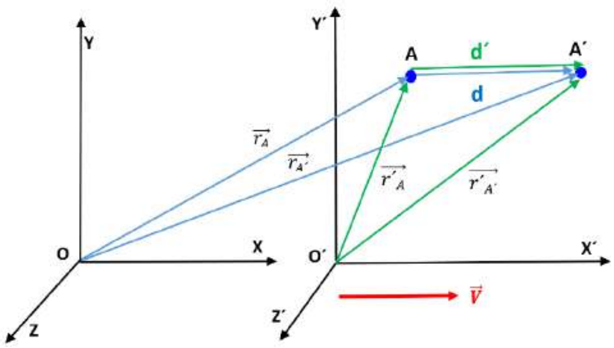
$x' = x - vt$
$y' = y$ *Transformadas galileanas*
$z' = z$

igualmente se supone que $t' = t$

La suposición de igualdad del tiempo es clave en la mecánica clásica, que parte de la idea de que el tiempo transcurre independientemente y por igual en todos los sistemas de referencia, es decir, el tiempo es considerado como una realidad absoluta y universal.

Estas cuatro ecuaciones constituyen las transformaciones galileanas de las coordenadas y del tiempo.

En la siguiente figura (es igual a la anterior desde otra perspectiva) se aprecia otro hecho clave en la relatividad galileana: si el cuerpo A se desplaza desde A hasta A´ en la dirección del eje X, ambos observadores, O y O´, miden la misma distancia desde los dos sistemas de referencia, veamos:



Observador O: d = $\Delta x = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = x_{A'} - x_A$

Observador O´: d´= $\Delta x' = \vec{r}\,'_{A'} - \vec{r}\,'_A = x'_{A'} - x'_A =$

$= (x_{A'} - vt) - (x_A - vt) =$

$= x_{A'} - x_A \Rightarrow \Delta x' = \Delta x \Rightarrow d' = d$

Es lógico que alguno piense ¿para qué demostrar que d = d´ si ya se ve en la gráfica?

Hay que tener en cuenta que el álgebra es el lenguaje que garantiza la **verdad lógica** de la conclusión, independientemente de lo que podamos dibujar en un diagrama con precisión.

La conclusión que d = d´ nos permite, desde el punto de vista de las transformaciones galileanas, afirmar que:

La distancia entre dos puntos es invariable para cualquier sistema inercial

Derivando respecto al tiempo las transformadas galileanas de la posición y la distancia obtendremos la **transformación galileana de la velocidad:**

$$x' = x - vt \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{d(x-vt)}{dt} \Rightarrow v'_{x'} = v_x - v \qquad (v \text{ es constante})$$

$$y' = y \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} \Rightarrow v'_{y'} = v_y$$

$$z' = z \qquad \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} \Rightarrow v'_{z'} = v_z$$

En este caso comprobamos que que la velocidad medida en cada sistema no es la misma, sino que depende del movimiento relativo entre ambos (en nuestro cado era un desplazamiento en Ox).

La velocidad de un objeto observado es variable al pasar de un sistema de referencia inercial a otro que se mueve con velocidad constante con respecto al primero.

Derivando de nuevo respecto al tiempo obtendremos la **transformación galileana de la aceleración.**

$$\frac{dv'_{x'}}{dt} = \frac{d(v_x - v)}{dt} \Rightarrow a'_{x'} = a_x$$

Hay que tener en cuenta que la velocidad relativa de desplazamiento entre ambos sistemas, v, es constante

$$\frac{dv'_{y'}}{dt} = \frac{dv_y}{dt} \Rightarrow a'_{y'} = a_y$$

$$\frac{dv'_{z'}}{dt} = \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow a'_{z'} = a_z$$

Observamos un hecho fundamental:

La aceleración es invariable en los sistemas de referencia inerciales.

Si no fuera así, tendríamos que admitir que las fuerzas que actúan sobre la partícula dependen del sistema de referencia, y no tendrían carácter universal.

Pero hemos deducido que la aceleración es invariable en sistemas inerciales, así, por ejemplo, la aceleración de caída libre que medirían dos observadores en distintos sistemas inerciales tendría el mismo valor, con independencia de su movimiento relativo. La propuesta consecuente es que ambos observadores harán referencia a la misma fuerza para explicar esa aceleración.

Este hecho da lugar al principio de relatividad galileano:

Las leyes básicas de la naturaleza son las mismas para cualquier observador que se encuentre en uno u otro sistema de referencia inercial.

Esto, a su vez da lugar a la siguiente afirmación:

No se puede determinar si un sistema de referencia está reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

LA RELATIVIDAD GALILEANA Y LA VELOCIDAD DE LA LUZ

James Clerk Maxwell, al combinar matemáticamente la tercera y la cuarta de sus ecuaciones —la ley de Faraday y la ley de Ampère-Maxwell— obtuvo una ecuación de onda para los campos eléctrico y magnético. Esta ecuación predecía que las perturbaciones electromagnéticas se propagan por el espacio como una onda cuya velocidad depende solo de dos constantes fundamentales ya conocidas, la permitividad eléctrica del vacío (ε_0) y la permeabilidad magnética del vacío (μ_0):

$$\boldsymbol{c} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} \approx 3\cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Al calcular esta velocidad (1865), Maxwell descubrió que coincidía prácticamente con la velocidad de la luz medida experimentalmente. Así identificó la luz como una onda electromagnética. Todas las ondas electromagnéticas —independientemente de su frecuencia— viajan a esta misma velocidad constante en el vacío, unificando el electromagnetismo con la óptica.

Si la luz es una onda electromagnética cuya velocidad viene dada por las ecuaciones de Maxwell, surge una cuestión fundamental: **¿medirán todos los observadores la misma velocidad de propagación de la luz, incluso si se mueven unos respecto a otros?**

Según la mecánica clásica, y en particular el principio de relatividad galileano, la velocidad medida por un observador cambia al pasar de un sistema de referencia a otro. Así, un observador en movimiento respecto a la fuente de luz debería medir una velocidad distinta de otro que permanezca en reposo.

Y aquí aparece el conflicto:

Si la velocidad de la luz dependiera del movimiento del observador, las ecuaciones de Maxwell dejarían de ser válidas para todos los sistemas de referencia. Solo funcionarían plenamente en un sistema “privilegiado”, algo que contradice a la física clásica, según la cual ningún sistema inercial es especial.

A finales del siglo XIX, esta contradicción estaba en el centro del problema:

- o la velocidad de la luz era la misma para todos los observadores (y fallaba la transformación clásica de velocidades).

-o variaba según el observador (y entonces las ecuaciones de Maxwell no podían ser universales).

Encontrar la respuesta a esta cuestión se convirtió en la clave para avanzar.

EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

En el siglo XIX, la física estaba dominada por la idea de que todas las ondas necesitaban un medio material para propagarse. El sonido viaja por el aire, las olas por el agua, las vibraciones por los sólidos. Cuando Maxwell demostró que la luz era una onda electromagnética, parecía natural asumir que también necesitaba un medio de propagación.

Este medio hipotético se llamó **éter lumínífero**, y debía tener propiedades extraordinarias y contradictorias:

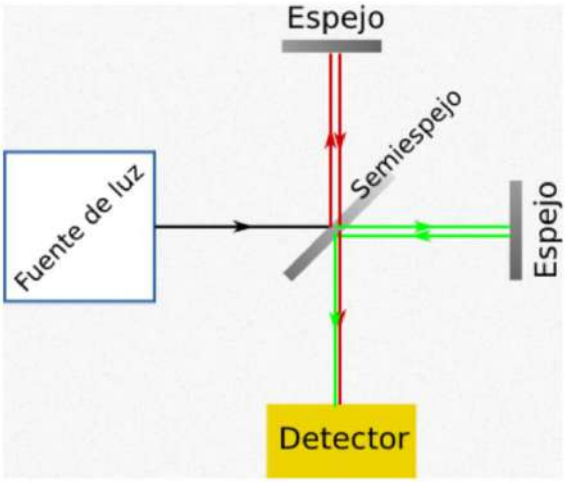
- Debía ser **extremadamente rígido** para transmitir ondas a la velocidad de la luz (300.000 km/s).
- Al mismo tiempo, debía ser **tan tenue** que no ofreciera resistencia al movimiento de los planetas.
- Debía **llenar todo el espacio**, incluyendo el vacío entre las estrellas.
- Debía ser **invisible e indetectable** excepto por sus efectos sobre la luz.

La comunidad científica aceptaba la existencia del éter lumínífero como un hecho, aunque nadie lo había detectado.

Si la Tierra se movía a través del éter a 30 km/s (su velocidad orbital alrededor del Sol), debería experimentar un "viento de éter", similar al viento que sientes cuando vas en bicicleta en un día sin viento.

El experimento de Michelson y Morley buscaba comprobar si la luz tardaba tiempos distintos en recorrer trayectos según su orientación respecto al movimiento de la Tierra. Si el éter existiera, la luz enviada en una dirección paralela al movimiento de la Tierra debería verse afectada de manera diferente que la enviada en dirección perpendicular, igual que un nadador tarda más o menos al avanzar a favor, en contra o atravesando una corriente.

Estas diferencias en los tiempos permitirían determinar la velocidad de la Tierra a través del supuesto éter. Albert Michelson, en 1861, diseñó un instrumento extraordinariamente preciso llamado **interferómetro**, cuyo funcionamiento básico es el siguiente**:**



1. **Fuente de luz**: Un rayo de luz monocromática (de un solo color)
2. **Divisor de haz**: Un espejo semitransparente divide el rayo en dos haces perpendiculares:
   Rayo 1: viaja paralelo al movimiento de la Tierra
   Rayo 2: viaja perpendicular al movimiento de la Tierra
3. **Espejos**: Cada rayo, verde y rojo en la imagen, viaja hasta un espejo distante (varios metros) y regresa
4. **Detector**: Los dos rayos, verde y rojo de la imagen, se recombinan en el detector y se observa el **patrón de interferencia**

Si el éter existía, los dos rayos tardarían tiempos ligeramente diferentes en hacer su recorrido de ida y vuelta. Esta diferencia de tiempos crearía un desfase entre las ondas, produciendo un **patrón de franjas de interferencia** característico (bandas claras y oscuras).

El interferómetro era tan sensible que podía detectar diferencias de tiempo del orden de 10^{-16} segundos, pero Albert Michelson no encontró interferencias en el detector.

En 1887 mejoró aún más el interferómetro junto con Edward Morley, y realizaron múltiples experiencias, incluso variando el emplazamiento y la época del año para que el "viento del éter" tuviese diferentes direcciones.

Pero el experimento seguía sin dar interferencia y las conclusiones eran:

- Las transformaciones de Galileo no se cumplen en el caso de la luz.
- La velocidad de la luz es siempre constante, independientemente del moviendo del foco emisor.

CONTRACCIÓN DE LORENTZ – FITZGERALD

Los resultados nulos del experimento de Michelson–Morley generaron una gran perplejidad. Si bien la relatividad galileana funcionaba para la mecánica de Newton, parecía fallar cuando se aplicaba a la luz, creando una profunda inconsistencia con las leyes del electromagnetismo.

Para mantener la validez del éter y, al mismo tiempo, explicar el resultado de Michelson–Morley, los físicos George FitzGerald (1889) y Hendrik Lorentz (1892) propusieron, de forma independiente, una hipótesis radical: la **Contracción de la Longitud** de los cuerpos en movimiento a través del éter. Según sus cálculos, la longitud de un cuerpo se reduciría en la dirección del movimiento en un factor γ (factor de Lorentz que veremos en el apartado Transformadas de Lorentz).

$$L = \frac{L_o}{\gamma} \quad siendo \ \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Así, Lorentz (y FitzGerald) propusieron que la **Contracción de la Longitud** era un **efecto físico real** (una interacción con el éter) que hacía que el brazo del interferómetro orientado en la dirección del movimiento terrestre se encogiera *exactamente* lo suficiente para que la luz tardara el mismo tiempo en ambos brazos, cancelando el efecto que se intentaba medir.

Esta fórmula, interpretada para "salvar el éter", fue reinterpretada por Einstein en 1905 como una **propiedad geométrica del espacio-tiempo**, no como una interacción con un medio físico. Con ello, Einstein eliminó la necesidad del concepto del éter.

TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL DE EINSTEIN. PRINCIPIO DE SIMULTANEIDAD

La teoría de la relatividad de Einstein se construyó, entre otros hechos experimentales, sobre el resultado nulo del experimento de Michelson–Morley, que intentó detectar variaciones en la velocidad de la luz debidas al movimiento de la Tierra. Dicho resultado mostró que no se apreciaban diferencias en la velocidad de la luz según la dirección del movimiento terrestre, lo que puso en duda la existencia del éter luminífero clásico y apuntó a que la velocidad de la luz es independiente del movimiento del observador.

Ahora bien, para comprender el alcance de este resultado debemos situarlo en el contexto adecuado**, los sistemas inerciales:**

Son sistemas inerciales aquellos que se mueven unos con respecto a otros con velocidad relativa constante (ni acelerados ni rotando).

Además, las observaciones astronómicas indicaban que la velocidad de la luz no parecía cambiar aunque las fuentes emisoras estuvieran en movimiento (por ejemplo, en estrellas binarias). Si a esto se suma el resultado de Michelson y Morley, que no detectaron variaciones dependientes del movimiento de la Tierra, Einstein concluyó que la velocidad de la luz debía ser la misma para todos los observadores inerciales en cualquier caso.

Por ello, en 1905 Einstein formuló la teoría especial de la relatividad (también llamada relatividad restringida) a partir de los siguientes postulados:

Primer postulado (Principio de relatividad): *Las leyes de la física son idénticas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

Esto significa que no existe un sistema de referencia absoluto y que los fenómenos físicos se comportan de la misma manera en todos ellos.

Este postulado incluye las leyes de la Mecánica, la Electrodinámica y la Óptica.

Segundo postulado (Principio de constancia de la velocidad de la luz): *La velocidad de la luz en el vacío es la misma (c) para todos los observadores inerciales, sin importar el movimiento de la fuente de luz o del observador.*

Simultaneidad.

Imaginemos un observador O parado en un andén por donde pasa un tren a gran velocidad. En el centro de uno de los vagones viaja otro observador, O'. Justo cuando ambos quedan frente a frente, el observador O' acciona un interruptor que produce un destello de luz situado exactamente en el centro del vagón.

Para el observador que viaja en el tren, las distancias desde la fuente de luz hasta la parte delantera y trasera del vagón son iguales y constantes. Como la velocidad de la luz es la misma en todas las direcciones, O' concluye que el destello llegará simultáneamente a ambos extremos del vagón, donde hay dos sensores que registrarán la llegada de la luz.

Sin embargo, el observador O, situado en el andén, describe la situación de manera diferente. Desde su punto de vista, la parte trasera del tren se mueve hacia el punto en el que se emitió la luz, mientras que la parte delantera se aleja de él. Como la velocidad de la luz tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, la luz que viaja hacia la parte trasera debe recorrer una distancia menor que la que se dirige hacia la parte delantera. Por tanto, para O, los dos sensores del tren no se activarán al mismo tiempo.

Este ejemplo, adaptado del propuesto originalmente por Einstein, lleva a una conclusión fundamental: **dos sucesos que son simultáneos para un observador (en este caso, la llegada de la luz a ambos extremos del vagón para O') pueden no ser simultáneos para otro observador en movimiento relativo (para O)**. Dicho de otra forma:

- Dos observadores estacionarios uno respecto al otro medirán el mismo intervalo temporal si los sucesos ocurren en un mismo punto.

- Dos observadores en movimiento relativo, en cambio, pueden asignar intervalos de tiempo distintos a los mismos sucesos.

Esta relatividad de la simultaneidad muestra por qué las transformaciones galileanas resultan inválidas cuando se aplican a situaciones electromagnéticas. En dichas transformaciones se suponía que t=t' para todos los observadores, es decir, un tiempo absoluto e idéntico en todos los sistemas de referencia. Sin embargo, la constancia universal de la velocidad de la luz —segundo postulado de la Relatividad Especial— obliga a abandonar esta idea. **Para que todos los observadores midan el mismo valor de c, el espacio y el tiempo no pueden ser absolutos: deben ajustarse y mezclarse entre sí, dejan de ser independientes.**

La **relatividad del tiempo** (incluida la dilatación temporal) es, por tanto, una consecuencia directa de este principio fundamental.

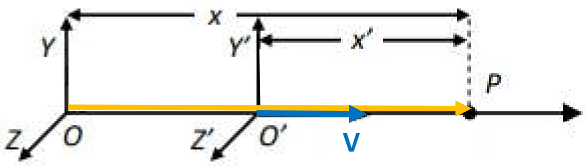
TRANSFORMADAS DE LORENTZ

Supongamos dos observadores O y O´ en movimiento relativo de velocidad constante u a lo largo del eje OX común. En el instante en que O = O´ se emite un rayo de luz que se desplaza a velocidad c respecto a ambos observadores. Al cabo de un tiempo t medido en el sistema de O y de un tiempo t´ medido en O´ la señal luminosa llega a un punto P. Los módulos al cuadrado de los vectores de posición, que dependen de las tres direcciones espaciales, para cada sistema de referencia vendrán dados por:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Dado que la velocidad de la luz es igual para ambos sistemas, el vector posición será, de forma general, r = ct

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad c^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$



Como el movimiento tiene lugar en la dirección del eje Ox común se cumple que y´= y´ y z =z´, por lo que restando las dos últimas ecuaciones se obtiene:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2$$

A partir de este sistema se puede llegar a obtener la relación entre x con x´ y la relación entre t y t´, pero para ello es necesario un desarrollo matemático complejo que no tiene interés para este curso, y cuyas soluciones son las siguientes:

$$\boldsymbol{x' = \gamma(x - vt)}$$

$$\boldsymbol{t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)}$$

Donde γ es el factor de Lorentz $\quad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$$\left.\begin{array}{l} y' = y \\ z' = z \end{array}\right\}$$ Por ser movimiento en eje Ox

TRANSFORMADAS DE LORENTZ

La transformación inversa de Lorentz nos proporciona los valores en el sistema O a partir de los del sistema O´, siendo: $\boldsymbol{x = \gamma(x' + vt)}$ $\quad \boldsymbol{t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x\right)}$

Si lo aplicamos al caso en que v<<<c, tenemos que **γ es prácticamente igual a 1 y el término $\frac{v}{c^2}$ es prácticamente igual a 0**, por lo que las ecuaciones anteriores se convierten en:

x´= x – vt
y´= y
z´= z
t´= t

Que son precisamente las ecuaciones de las transformadas galileanas. Esto confirma su validez para velocidades bajas (v<<c), no siendo válidas para velocidades comparables a c ni para aplicar consistentemente las leyes del Electromagnetismo y la Óptica.

Transformación relativista de la velocidad

Consideremos un cuerpo que se mueve a lo largo del eje X con velocidad v_x medida por el observador O. El sistema del observador O′ se mueve a su vez con velocidad constante v respecto de O, también a lo largo del eje X.

Queremos determinar cuál será la velocidad del cuerpo medida por O′, es decir, v'_x.

Para el observador O′, durante un intervalo de tiempo Δt′, el cuerpo habrá recorrido una distancia Δx′. Por tanto, la velocidad medida por O′ será:

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad (*)$$

Aplicando incrementos a las transformadas de Lorentz:

$$\boldsymbol{\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)} \qquad \boldsymbol{\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)}$$

Y sustituyendo esos incremento en $v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ tenemos que:

$v'_x = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \left(\frac{v}{c^2}\right)\Delta x}$ y dividiendo numerador y denominador por Δt ⇨ $v'_x = \frac{\frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t}}{\frac{\Delta t - \left(\frac{v}{c^2}\right)\Delta x}{\Delta t}}$ y siendo $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x$ ⇨

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}v_x}$$

(*) Hemos utilizado incrementos finitos Δx´ y Δt´ para deducir la Transformación Relativista de la Velocidad, en lugar del rigor matemático de $\frac{dx'}{dt'}$ (cálculo diferencial), para hacerlo menos engorroso, obteniendo el mismo resultado.

Podemos comprobar de nuevo que si v<<<c la transformada de Lorentz se corresponde con la transformada galileana:

$$v'_{x'} = v_x - v$$
$$v'_{y'} = v_y$$
$$v'_{z'} = v_z$$

CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD

En un proceso no relativista podemos utilizar las transformaciones de galileo, la longitud de una varilla situada en el eje Ox en un sistema Oxyz vendrá dada por la diferencia en las posiciones de sus extremos:

$$\boldsymbol{L = x_2 - x_1}$$

En el sistema O´x´y´z´ que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ (en el eje Ox) utilizando igualmente las transformaciones de galileo, la longitud de la varilla vendrá dada por:

$$\boldsymbol{L = x_2 - x_1 = (x'_2 + vt) - (x'_1 + vt) = x'_2 - x'_1 = L'}$$

Es decir, la longitud de la varilla y en general, la distancia, no son relativos desde el punto de vista clásico.

Sin embargo, desde el punto de vista relativista hay que aplicar las transformaciones de Lorentz:

$$L' = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 + vt) - \gamma(x'_1 + vt) = \gamma(\boldsymbol{x'_2 - x'_1}) = \boldsymbol{\gamma L'} \;⇨\; \boldsymbol{L' = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde L es la longitud propia de la varilla (longitud en el sistema de referencia en reposo con la varilla), L´ es la longitud de varilla en el sistema en movimiento relativo y γ es el factor de Lorentz. Como v <

c, la raiz cuadrada es menor que la unidad y, por tanto, la longitud de la varilla medida en el sistema con movimiento relativo, O´x´y´z´, es menor que en el sistema en reposo, Oxyz.

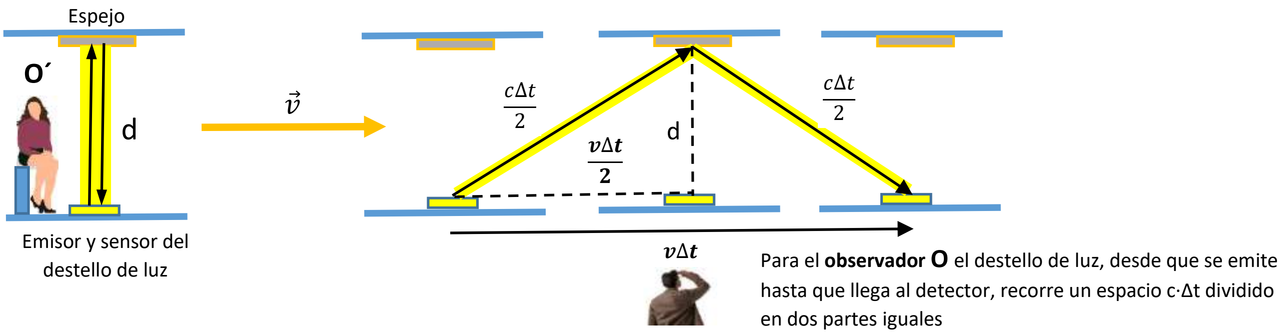
Este fenómeno se conoce con el nombre de **contracción de Lorentz** y puesto que la velocidad relativa v se encuentra al cuadrado en la fórmula:

- Si O ve a O' moverse a + v: La contracción es proporcional a $(+v)^2$
- Si O' ve a O moverse a - v**:** La contracción es proporcional a $(-v)^2$

Y dado que $(-v)^2 = v^2$ el **factor de contracción es idéntico** en ambos casos y los observadores verán la varilla del otro sistema acortada, lo que reafirma que no existe un sistema de referencia absoluto.

DILATACIÓN DEL TIEMPO

Sean dos observadores, O´ y O. El primero está situado en un vehículo en donde, desde el suelo, se dispara un haz de luz hacia el techo, donde hay un espejo que lo refleja hacia el suelo para que lo detecte un sensor situado en el mismo origen del destello. Este vehículo se desplaza a una velocidad v respecto a otro observador O como se representa en la imagen.



Para el observador O´, la luz recorre una distancia 2d en ir y volver al sensor, por lo que el tiempo empleado es:

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}$$

Vemos en el lado derecho de la imagen que para el **observador O** el destello de luz, desde que se emite hasta que llega al detector, recorre un espacio c·Δt dividido en dos partes iguales $\left(\frac{c\cdot\Delta t}{2}\right)$.

En el triángulo rectángulo de la figura se tiene que cumplir que:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2 \;\Rightarrow\; c^2\Delta t^2 = v^2\Delta t^2 + 2^2d^2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\Delta t^2} = \frac{v^2\boldsymbol{\Delta t^2}}{c^2} + \frac{2^2d^2}{c^2} \;\Rightarrow$$

$$\Delta t^2 - \frac{v^2\boldsymbol{\Delta t^2}}{c^2} = \frac{2^2d^2}{c^2} \;\Rightarrow\; \Delta t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{2^2d^2}{c^2} \;\Rightarrow\; \Delta t^2 = \frac{2^2d^2}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \;\Rightarrow\; \Delta t = \frac{2d}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

pero como $\frac{2d}{c} = \Delta t'$ ⇨

$$\boldsymbol{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

Fórmula de la dilatación del tiempo

También expresada como $\boldsymbol{\Delta t = \gamma\Delta t'}$ siendo $\boldsymbol{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$

LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

Supongamos que en una base situada en la Tierra se encuentra una nave a punto de despegar. En la puerta de la nave se abrazan dos hermanos gemelos que se despiden. Uno de ellos va a pilotar la nave, mientras que el otro esperará su retorno en la Tierra. La nave despega y durante un largo viaje a velocidades cercanas a la luz, regresa y posa su nave en la plataforma espacial y abraza a su hermano gemelo que ha ido a recibirle. ¿Cuál de ellos habrá envejecido más?

Desde el punto de vista del gemelo en la Tierra, los relojes de la nave, que han estado moviéndose a gran velocidad respecto de él, han debido atrasarse y el gemelo en la nave debería haber envejecido menos. Pero al gemelo en la nave le habrá parecido que la Tierra se ha movido con gran velocidad respecto a él, que los relojes aquí deben haberse retrasado y que su hermano en la Tierra es más joven que él. Es decir, ambos piensan que su otro hermano debe ser más joven (esta es la paradoja).

La Teoría Especial de la Relatividad da una respuesta inequívoca a la aparente paradoja: es el gemelo que ha viajado a velocidades cercanas a la luz el que tiene el reloj atrasado. El hermano gemelo que baja de la nave será más joven que el que ha permanecido en la Tierra.

Aunque pueda parecernos muy lejos de la realidad cotidiana, experimentos de este tipo se han llevado a cabo directamente. En octubre de 1971, cuatro relojes de haces atómicos de cesio, dieron dos veces la vuelta al mundo en vuelos regulares de aviones comerciales, una vez hacia el Este y otra vez hacia el Oeste, para probar la teoría de la relatividad de Einstein con relojes atómicos de cesio.

La concordancia de los resultados teóricos y reales, estuvieron dentro del margen de error de la predicción, **confirmando** tanto la Relatividad Especial (Dilatación del Tiempo) como la Relatividad General.

LA VELOCIDAD DE LA LUZ, UN LÍMITE INFRANQUEABLE. LA PARADOJA DE C + C = C

Si dos automóviles circulan a 120 km/h en sentido y carriles contrarios, en el momento del cruce la sensación relativa de velocidades es de 240 km/h, aunque la realidad aplicando la transformada de Lorentz, $v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$ es de 239,9999999999997 km/h, en definitiva 240 km/h para nuestra realidad.

Pero que ocurre si se cruzan circulando a una velocidad de 0,4c, que de forma clásica sería 0,8c:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = \frac{0{,}4c - (-0{,}4c)}{1 - \frac{(-0{,}4c)}{c^2} 0{,}4c} = 0{,}69c$$

y si fuera con 0,5c, que de forma clásica sería 1c (velocidad de la luz):

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = \frac{0{,}5c - (-0{,}5c)}{1 - \frac{(-0{,}5c)}{c^2} 0{,}5c} = 0{,}8c$$

Y con 0,6c, que de forma clásica sería 1,2c (superior a la velocidad de la luz):

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = \frac{0{,}6c - (-0{,}6c)}{1 - \frac{(-0{,}6c)}{c^2} 0{,}6c} = 0{,}88c \text{ no llega a la velocidad de la luz}$$

Con 0,9c daría 0,994c, con 0,99c daría 0,99995c, es decir hay una tendencia a llegar a c.

Y que ocurre si se cruzan cada uno a la velocidad de la luz c + c = ¿ (de forma clásica sería 2c)

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = \frac{c - (-c)}{1 - \frac{(-c)}{c^2} c} = c \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c + c = c}$$

La velocidad de la luz en el vacío es un límite insalvable. No existe cuerpo que pueda desplazarse a velocidades mayores que la de la luz en el vacío, con independencia del sistema de referencia que elijamos.

La velocidad de la luz en el vacío, c, es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales, con independencia de su movimiento relativo (lo que confirma el segundo postulado de Einstein).

MASA Y MOMENTO RELATIVISTA (*)

Hemos estudia que la segunda ley de Newton dice:

"La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él e inversamente proporcional a la masa: a = F/m ⇨ F = ma".

Pero la existencia de un límite superior de velocidades entra en contradicción con esta ley de Newton (F = ma), ya que según la dinámica newtoniana si aplicamos una fuerza a un objeto éste aumenta su velocidad, mientras exista la fuerza, sin límite alguno, pero ahora sabemos que sí existe un límite, la velocidad de la luz.

En realidad, La Segunda Ley, tal como Newton la presentó en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687), se expresaba de la siguiente manera:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad \text{donde } p \textit{ es la cantidad de movimiento } \vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}} \ ⇨ \ \vec{F} = \frac{\Delta m\vec{v}}{\Delta t}$$

Si imponemos el límite c a la velocidad, la acción continuada de la fuerza ya no podrá provocar un aumento de la velocidad llegado a c, lo cual solo puede explicarse si suponemos que la masa se incrementa con la velocidad (masa relativista) (*).

La condición que cumple con que la masa sea infinita con v = c y que coincida con la masa del cuerpo medida en reposo relativo, m_o cuando v = 0 es:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_o$$

$$m_{relativista} = \gamma m_o \quad (*)$$

Podemos comprobar que si v = c ⇨ m = ∞ y si v = 0 ⇨ m = m_o

Esto no lleva a que: $$\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{relativista}} = \boldsymbol{\gamma m_o \vec{v}}$$

(*) Nota sobre la masa en Relatividad:

En la física actual, **la masa se considera una propiedad invariante, no cambia con la velocidad**. La llamada *masa relativista* (m=γm_0) se mantiene en el currículo de Bachillerato principalmente por razones históricas y didácticas, ya que permite conservar la forma de expresiones clásicas como p=mv.

En rigor, lo que aumenta con la velocidad es la energía y el momento lineal, no la masa en reposo m_0, siendo el factor de Lorentz (γ) el que describe los efectos relativistas.

No obstante, en los ejercicios de Bachillerato se debe utilizar la terminología y las fórmulas indicadas en el enunciado; si se pide calcular la *masa relativista*, se emplea correctamente m=γm_0, obteniéndose los mismos resultados numéricos que con el enfoque actual.

Esta aclaración es solo para que tengas una base conceptual sólida si decides continuar con estudios en los que se incluya una física más avanzada, donde verás que el enfoque ha evolucionado hacia una comprensión más precisa de estos fenómenos relativistas.

EQUIVALENCIA MASA-ENERGÍA

El **Trabajo (W)** realizado por una fuerza para acelerar un objeto desde el reposo hasta una velocidad v es igual al cambio en su **Energía Cinética (E_c):**

$$E_c = W = \int F \cdot dx$$

En **Mecánica Relativista**, la fuerza F está relacionada con el momento relativista:

$$\vec{F} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt}$$

Donde m_0 es la masa en resposo (la masa propia) y γ es el factor de Lorentz $\boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\frac{v^2}{c^2}}}$

Al sustituir esta expresión de la fuerza y resolver la integral (un paso que requiere cálculo avanzado y se omite en Bachillerato), se obtiene la fórmula de la **Energía Cinética Relativista**:

$$\boldsymbol{E_c = (\gamma - 1)m_0c^2} \quad \textbf{(*)}$$

Esta expresión muestra que la energía cinética depende del factor relativista γ y no crece indefinidamente de forma clásica al aumentar la velocidad.

$$\boldsymbol{E_c = (\gamma - 1)m_0c^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_oc^2} \quad \textbf{(*)}$$

Sumando a la energía cinética E_c la **energía en reposo** del objeto, $\mathbf{E_0=m_0c^2}$, se obtiene la **energía total relativista**:

$$E_c + m_0c^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_oc^2$$

En definitiva:

$$\boldsymbol{E_{total} = E_c + m_0c^2 = \gamma m_oc^2 = \frac{m_oc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$

En particular, cuando el objeto está en reposo (v=0 ⇨ γ=1), la energía total se reduce a su **energía en reposo**:

$$\boldsymbol{E_0 = m_0c^2}$$

En 1905, Einstein estableció la equivalencia entre masa y energía al demostrar que un cuerpo en reposo posee una energía intrínseca dada por $\mathbf{E_0 = m_0c^2}$. En sus primeros trabajos se escribió de forma abreviada como **$E=mc^2$**, sin distinguir explícitamente entre energía total y energía en reposo. Con el desarrollo posterior de la Relatividad Especial se aclaró que la energía total de una partícula en movimiento es E=γm_0c^2, y que la famosa expresión $E = mc^2$ se refiere, en rigor, a la energía asociada a la masa en reposo.

(*) Se puede comprobar que, mediante el desarrollo en serie de Taylor, cuando v tiende a 0 la fórmula se convierte en nuestra conocida energía cinética clásica $E_c = ½ mv^2$

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA MASA Y LA ENERGÍA

Este principio establece la gran unificación de la física lograda por Einstein. Históricamente, la física clásica se basaba en la **conservación de la energía y en la conservación del momento**. La masa de un sistema se consideraba prácticamente constante en procesos químicos, aunque no constituía un principio de conservación fundamental independiente. La Relatividad demostró que la energía asociada a la masa en reposo forma parte de la energía total del sistema, de modo que masa y energía no son magnitudes independientes, sino manifestaciones diferentes de una misma entidad.

Los nuevos principios unificados, el **Principio de Conservación de la Masa-Energía y el Principio de Conservación del Momento** (que permanece válido en relatividad con $\vec{p} = \gamma m_0\vec{v}$), establecen que:

En cualquier sistema físico aislado, la energía total relativista permanece constante. La masa puede transformarse en una cantidad equivalente de energía y viceversa.

Masa como Energía: La materia posee una cantidad de energía intrínseca, incluso en reposo, dada por la ecuación: $E_o = m_oc^2$

Defecto de Masa: Este principio es fundamental para explicar la energía nuclear. En procesos como la fisión, la masa de los productos es menor que la masa de los reactivos iniciales. La pequeña cantidad de masa que falta (Δm) se ha convertido en la inmensa cantidad de energía liberada en la reacción (ΔE):

$$\Delta \boldsymbol{E} = \Delta \boldsymbol{mc}^2$$

TEORÍA DE RELATIVIDAD GENERAL

Albert Einstein amplió su Teoría Especial de la Relatividad en 1915 para incluir el movimiento acelerado y, fundamentalmente, para crear una nueva teoría de la gravedad. Esta generalización se conoce como la Teoría General de la Relatividad (TRG).

La TRG introduce una idea revolucionaria: la gravedad no es una fuerza de atracción misteriosa, sino una manifestación de la geometría del Universo.

La TRG postula que la presencia de **masa y energía** (Materia) altera la estructura del Universo, que se describe como un **espacio-tiempo** de cuatro dimensiones (tres espaciales y una temporal).

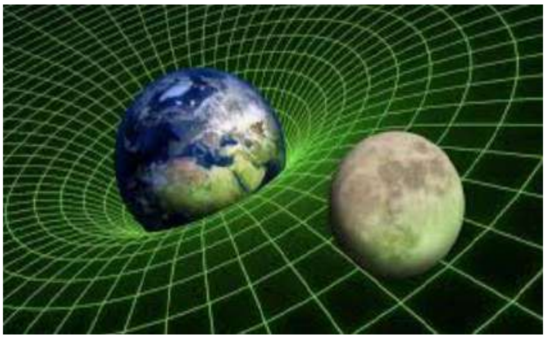
La Causa: La **masa curva el espacio-tiempo** que la rodea. Esto es similar a colocar una bola pesada sobre una cama elástica, creando una depresión y la **gravedad** es el efecto que sentimos cuando nos movemos a través de esta región curva. Los objetos no se "atraen", sino que siguen la trayectoria más corta y recta posible en ese espacio deformado.

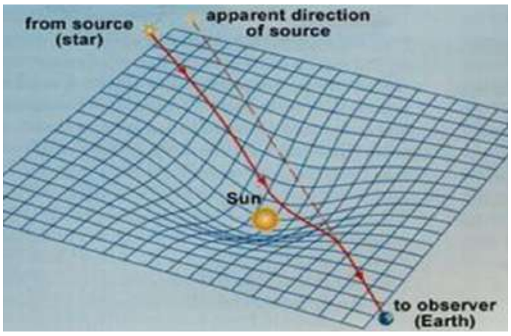
Las trayectorias que siguen los cuerpos a través del espacio-tiempo curvo se denominan **geodésicas.**

- En un espacio plano, una geodésica es una línea recta.
- En el espacio-tiempo curvo alrededor de un planeta o una estrella, la geodésica se curva. La Tierra orbita alrededor del Sol porque sigue la geodésica curvada que el Sol ha creado en el espacio-tiempo.

Como la luz transporta energía (y por la equivalencia $E=mc^2$ la energía es equivalente a la masa), la luz también debe seguir las curvas del espacio-tiempo.

La luz, al pasar cerca de un objeto de gran masa, como el Sol, cambia la dirección de su propagación (se curva). **Este fenómeno se conoce como deflexión de la luz y fue una de las primeras pruebas que confirmó la TRG en el eclipse del 29 de mayo de 1919.**





Una prueba experimental cotidiana de que tanto la Relatividad Especial como la General son correctas y necesarias para la tecnología moderna, la tenemos en los relojes de los satélites GPS.

Los satélites GPS orbitan a unos 20.000 km de altitud y se mueven a unos 14.000 km/h. Esto produce dos efectos relativistas opuestos sobre sus relojes atómicos:

- Efecto de la velocidad (Relatividad Especial): Los relojes en movimiento van más lentos. A esa velocidad, los relojes del satélite atrasan unos 7 microsegundos al día respecto a los relojes terrestres.

- Efecto gravitacional (Relatividad General): Los relojes en campos gravitacionales más débiles (mayor altitud) van más rápido. A esa altura, los relojes del satélite adelantan unos 45 microsegundos al día respecto a los terrestres.

- **Efecto neto:** 45 - 7 = **+38 microsegundos/día de adelanto**.

Sin esta corrección, el GPS acumularía errores de **unos 10 km por día**, haciéndolo completamente inútil. Los relojes GPS se programan para funcionar a una frecuencia ligeramente menor (10.22999999543 MHz en lugar de 10.23 MHz exactos) para compensar ambos efectos relativistas.

Los satélites no se limitan a corregir su reloj en la fabricación; además, el sistema GPS está sometido a correcciones relativistas continúas debido a pequeñas variaciones en la órbita, excentricidad y perturbaciones gravitatorias.