EJERCICIOS RESUELTOS DE CAMPO GRAVITATORIO

La gran mayoría de los ejercicios son de pruebas de PAU de distintos años y comunidades.
No siguen ningún orden de dificultad ni orden respecto al contenido del tema de campo gravitatorio.
Los datos necesarios de las constantes G, M_T, R_T y otros necesarios siempre se incluyen en los problemas de las pruebas de PAU

Luis Pardillo Vela https://fisicayquimicaluis.wixsite.com/esoybach

1) En dos puntos, A y B, de coordenadas (20, 0) y (0, 20) expresadas en metros, se sitúan dos masas puntuales de 10 kg cada una.
a) Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto C (20, 20).
b) Hallar el potencial gravitatorio en el punto C.
c) Hallar la fuerza sobre una masa puntual de 5 kg, situada en ese punto C.
Dato: $G = 6{,}7\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

2) Un cuerpo de masa 10^7 kg se encuentra fijado en el punto (-200, 0) de un cierto sistema de referencia y otro cuerpo de masa $4{,}0\cdot10^7$ kg se encuentra fijado en el punto (400, 0). Todas las distancias se dan en metros.
a) Calcular y dibujar el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en el punto (0,0).
b) Hallar el potencial gravitatorio debido a estas dos masas en el punto (0,0).
Dato: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

3) Dos masas de 10 kg se hallan situadas en los puntos (5, 0) y (0, 5), respectivamente (en metros.
a) Calcula y representa la fuerza que experimenta una masa de 5 kg, situada en el punto (0, 0).
b) Calcula el trabajo necesario para llevar una masa de 5 kg desde el punto (0, 0) al punto (0, 10).
Dato: $G = 6{,}7\cdot10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

4) La Luna describe una órbita circular alrededor de la Tierra que se puede considerar inmóvil:
a) Halla la velocidad de la Luna en su órbita
b) Halla el período del movimiento de la Luna.
c) Halla la energía cinética de la Luna.
d) (0,5 p) Halla la energía total.
Datos: Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ $M_T = 5{,}97.\ 10^{24}$ kg
Distancia Tierra-Luna = 384.000 km $M_L = 7{,}35.\ 10^{22}$ kg.

5) Galileo observó las lunas de Júpiter en 1610. Descubrió que Ío, el satélite más cercano a Júpiter que pudo observar en su época, poseía un período orbital de 1,8 días y el radio de su órbita era aproximadamente 3 veces el diámetro de Júpiter. Así mismo, encontró que el período orbital de Calixto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de 16,7 días. Con estos datos, suponiendo órbitas circulares y utilizando que el radio de Júpiter es de $7.15\ 10^7$ m, calcular:
a) La masa de Júpiter.
b) El radio de la órbita de Calixto.

6) Un pequeño satélite, de 1500 kg de masa, describe una órbita circular alrededor de Marte, a una altura de 5000 km sobre su superficie.
DATOS: Masa de Marte: $M_M = 6{,}4.10^{23}$ kg Radio de Marte: R_M = 3390 km
a) Calcular el período del movimiento del satélite.
b) Calcular la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la energía total del satélite.
c) ¿Cuánto pesaría el satélite en la superficie de Marte? ¿Y en la superficie de la Tierra?

7) a) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifique la respuesta: "Si en un punto del espacio la intensidad del campo gravitatorio creado por varias masas es nulo, también lo será el potencial gravitatorio".
b) Dos cuerpos, de 10 kg de masa, se encuentran en dos de los vértices de un triángulo equilátero, de 0,6 m de lado.
i) Calcule el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo.
ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria de las dos masas para traer otro cuerpo de 10 kg desde el infinito hasta el tercer vértice del triángulo. DATO: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

8) Se desea situar un satélite de 100 kg de masa en una órbita circular a 100 km de altura alrededor de la Tierra. (a) Determine la velocidad inicial mínima necesaria para que alcance dicha altura; (b) una vez alcanzada dicha altura, calcule la velocidad que habría que proporcionarle para que se mantenga en órbita. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.

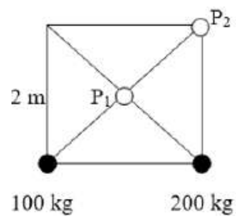
9) Razona la diferencia entre velocidad de escape y velocidad orbital

10) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio 3 RT. a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre. b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m_2 kg^{-2} ; $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6400$ km.

11) Un satélite natural, de $8 \cdot 10^{10}$ kg de masa, gira en una órbita circular a una altura de 800 km sobre la superficie de un cierto planeta P, cuyos datos se proporcionan debajo.
a) Hallar el periodo orbital del satélite.
b) Hallar la energía total del satélite.
c) Hallar el valor del campo gravitatorio en la superficie del planeta.
DATOS: Masa del planeta P: $M_P = 5 \cdot 10^{25}$ kg. Radio del planeta $R_p = 2 \cdot 10^4$ km.

12) La Luna describe una órbita casi circular en torno a la Tierra en 27,3 días
a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre la Luna y sobre la Tierra, suponiendo que estuvieran aisladas en el Universo.
b) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna
c) El valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m, podía estar en equilibrio en un punto alineado entre los centros Tierra - Luna y a una distancia de $3{,}4 \cdot 10^8$ m de la Tierra.
Datos: $G=6{,}67 \cdot 10^{-11}$ unidades SI; Masa de la Tierra; $M_T=5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

13) Del esquema de la figura:
a) Calcular el vector intensidad de campo en el punto P_1 y su módulo.
b) Trabajo necesario para llevar una masa de 50 kg desde el punto P_1 al punto P_2



14) A una altura de $1{,}5 \cdot 10^4$ km sobre la superficie terrestre, se mueve un satélite artificial de 500 kg, siguiendo una órbita circular.
a) Calcular la velocidad y la energía total que debe llevar dicho satélite para que no caiga sobre la superficie terrestre.
b) ¿Qué energía cinética mínima sería necesario comunicarle al satélite para que se alejara definitivamente de la Tierra?

Datos: La M_T= 6,0·10^{24} kg, G= 6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}. y R_T= 6370 km.
15) Un satélite de 600 kg gira en órbita circular a 5.000 m/s. Calcular; a) distancia a la que se encuentra sobre la superficie de la Tierra. b) Periodo. C) Energía que hay que suministrar para que su órbita pase a 9.000 km de altura. Datos: La M_T= 5,97·10^{24} kg, G= 6,67·10^{-11} N·m^2·kg^{-2}. y R_T= 6370 km.

16) Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción hacia la Tierra a lo largo de media órbita? b) Si la órbita fuera elíptica ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

17) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. a) ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape? b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

18) Se lanza un satélite artificial desde la superficie de un planeta, verticalmente y con una velocidad de 20 km/s. La masa del planeta es dos veces la masa de la Tierra y su radio la mitad del radio terrestre. Calcule: a) La velocidad de escape del planeta ¿Se escapa el satélite artificial de dicho planeta? b) Si en el momento del lanzamiento el satélite tiene una energía cinética de 10^{11} J, calcule su masa y la fuerza que ejerce el planeta sobre él. c) Admitiendo que el satélite queda ligado al planeta en una órbita circular, y recordando que fue lanzado con una velocidad de 20 km/s, calcule el radio de dicha órbita.
Datos: G=6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; M_{Tierra}=5,98·10^{24} kg; R_{Tierra}= 6370 km.

19) El Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC) con el apoyo del Cabildo de Tenerife, pondrá en órbita, entre 2026 y 2027, una red de 8 satélites, de entre 20 y 30 kg, en órbitas de baja altura (LEO) entre 450 y 700 kilómetros, con una vida útil para cada uno de unas 20.000 vueltas alrededor del planeta a) ¿Cuál es el tiempo de menor y mayor vida útil de esos satélites expresado en años? b) ¿cuál sería el satélite con mayor energía mecánica y cuál sería su valor?
Datos: G=6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; M_{Tierra}=5,98·10^{24} kg; R_{Tierra}= 6370 km.

SOLUCIONARIO EN LA SIGUIENTE PÁGINA

RESOLUCIONES

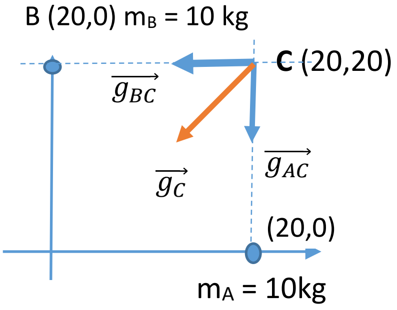
Luis Pardillo Vela https://fisicayquimicaluis.wixsite.com/esoybach

La gran mayoría de los ejercicios son de pruebas de PAU de distintos años y comunidades.
No siguen ningún orden de dificultad ni orden respecto al contenido del tema de campo gravitatorio
Los datos necesarios de las constantes G, M_T, R_T siempre se incluyen en las pruebas de PAU

1) En dos puntos, A y B, de coordenadas (20, 0) y (0, 20) expresadas en metros, se sitúan dos masas puntuales de 10 kg cada una.
a) Dibujar y calcular el vector campo gravitatorio producido por cada una de estas dos masas y el total en el punto C (20, 20).
b) Hallar el potencial gravitatorio en el punto C.
c) Hallar la fuerza sobre una masa puntual de 5 kg, situada en ese punto C.

Dato: G = $6{,}7\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

a)



$$\overrightarrow{g_{AC}} = -G\frac{m_A}{r^2_{AC}}\vec{j} = -6{,}7\cdot10^{-11}\frac{10}{20^2}\vec{j} = -1{,}675\cdot10^{-12}\vec{j}\ \text{N/kg}$$

$$\overrightarrow{g_{BC}} = -G\frac{m_B}{r^2_{BC}}\vec{\imath} = -6{,}7\cdot10^{-11}\frac{10}{20^2}\vec{j} = -1{,}675\cdot10^{-12}\vec{\imath}\ \text{N/kg}$$

$$\overrightarrow{g_c} = \overrightarrow{g_{AC}} + \overrightarrow{g_{BC}} = \mathbf{-1{,}675\cdot10^{-12}\vec{j} - 1{,}675\cdot10^{-12}\vec{\imath}\ N/kg = \overrightarrow{g_c}}$$

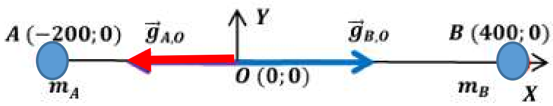
b) $V_C = V_{AC} + V_{BC} = \left(-G\frac{m_A}{r_{AC}}\right) + \left(-G\frac{m_B}{r_{BC}}\right) = -G\left(\frac{m_A}{r_A} + \frac{m_B}{r_B}\right) = -6{,}7\cdot10^{-11}\left(\frac{10}{20} + \frac{10}{20}\right) = \mathbf{-6{,}7\cdot10^{-11}\frac{J}{kg} = V_C}$

c) $\overrightarrow{F_C} = m\cdot\vec{g} = -1{,}675\cdot10^{-12}\vec{j} - 1{,}675\cdot10^{-12}\vec{\imath}$ **=** $-8{,}375\cdot10^{-12}\vec{j} - 8{,}375\cdot10^{-12}\vec{\imath}$

$$F = \sqrt{(-1{,}67\cdot10^{-12})^2 + (-1{,}67\cdot10^{-12})^2} = \mathbf{1{,}18\cdot10^{-11}\ N = F}$$

2) **Un cuerpo de masa 10^7 kg se encuentra fijado en el punto (-200, 0) de un cierto sistema de referencia y otro cuerpo de masa $4{,}0\cdot10^7$ kg se encuentra fijado en el punto (400, 0). Todas las distancias se dan en metros.**
a) Calcular y dibujar el vector campo gravitatorio producido por estas dos masas en el punto (0,0).
b) Hallar el potencial gravitatorio debido a estas dos masas en el punto (0,0).
Dato: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²

a)

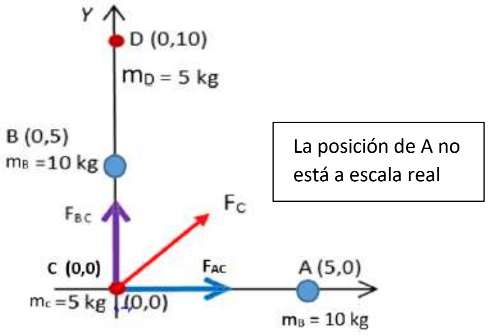


$$\overrightarrow{g_O} = \overrightarrow{g_{AO}} + \overrightarrow{g_{BO}} = G\cdot\left(-\frac{m_a}{(r_{AO})^2}\vec{\imath} + \frac{m_{ab}}{(r_{BO})^2}\vec{\imath}\right) = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\left(-\frac{10^7}{200^2}\vec{\imath} + \frac{4\cdot10^7}{400^2}\vec{\imath}\right) = \mathbf{0 = \overrightarrow{g_O}}$$

El campo gravitatorio se anula por los valores de las masas, cuádruple una de la otra y distancias dobles (cuádruple al estar afectadas de factor cuadrado) y los

b) $V_O = V_{AO} + V_{BO} = -G\left(\frac{m_A}{r_{AO}} + \frac{m_A}{r_{AO}}\right) = -6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\left(\frac{10^7}{200} + \frac{4\cdot10^7}{400}\right) = \mathbf{1\cdot10^{-5}\ J/kg = V_O}$

3) Dos masas de 10 kg se hallan situadas en los puntos (5, 0) y (0, 5), respectivamente (en metros.
a) Calcula y representa la fuerza que experimenta una masa de 5 kg, situada en el punto (0, 0).
b) Calcula el trabajo necesario para llevar una masa de 5 kg desde el punto (0, 0) al punto (0, 10).
Dato: G = $6{,}7\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$



a) $\overrightarrow{F_{AC}} = G\cdot\frac{m_A m_C}{r^2{}_{AC}}\vec{\imath} = 6{,}7\cdot10^{-11}\frac{10\cdot5}{5^2}\,\vec{\imath} = 1{,}34\cdot10^{-10}\,\vec{\imath}\ N$

$\overrightarrow{F_{BC}} = G\cdot\frac{m_B m_C}{r^2{}_{BC}}\vec{\imath} = 6{,}7\cdot10^{-11}\frac{10\cdot5}{5^2}\,j = 1{,}34\cdot10^{-10}\,\vec{\jmath}\ N$

$\overrightarrow{F_c} = \overrightarrow{F_{AC}} + \overrightarrow{F_{BC}} = 1{,}34\cdot10^{-10}\,\vec{\imath}\ +\ 1{,}34\cdot10^{-10}\,\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{F_c} = \sqrt{(1{,}34\cdot10^{-10})^2\ +\ (1{,}34\cdot10^{-10})^2}$ = **$1{,}9\cdot10^{-10}$ N = $\overrightarrow{F_c}$**

b) Veamos primero la distancia AD = $\sqrt{10^2+5^2}$ = 11,18 m

Y ahora los potenciales en C (inicial) y D (final)

$$V_c = V_{A\,en\,C} + V_{B\,en\,C} = G\left(\frac{m_A}{r_{AC}} + \frac{m_B}{r_{BC}}\right) = 6{,}7\cdot10^{-11}\left(\frac{10}{5}+\frac{10}{5}\right) = -2{,}68\cdot10^{-10}\,J/kg$$

$$V_D = V_{A\,en\,D} + V_{B\,en\,D} = G\left(\frac{m_A}{r_{AD}} + \frac{m_B}{r_{BD}}\right) = 6{,}7\cdot10^{-11}\left(\frac{10}{11{,}18}+\frac{10}{5}\right) = -1{,}94\cdot10^{-10}\,J/kg$$

$W_{C\ a\ D\ por\ la\ F\ gravitatoria} = m_{5kg}\Delta V = m_{5kg}(V_C - V_D) = 5(-2{,}68\cdot10^{-10} - (-1{,}94\cdot10^{-10}))$ = **$-3{,}7\cdot10^{-10}$ J**

Para trasladar la mas de 5 kg de C a D es necesaria una fuerza exterior, lo cual es lógico ya que estamos trasladando una masa de 5 kg de C a D mientras está atraída por las de A y B.

4) La Luna describe una órbita circular alrededor de la Tierra que se puede considerar inmóvil:
a) Halla la velocidad de la Luna en su órbita
b) Halla el período del movimiento de la Luna.
c) Halla la energía cinética de la Luna.
d) (0,5 p) Halla la energía total.
Datos: Constante de gravitación universal: G = $6{,}67.10^{-11}$ $N.m^2.kg^{-2}$ $M_T = 5{,}97.\ 10^{24}$ kg
Distancia Tierra-Luna = 384.000 km $M_L = 7{,}35.\ 10^{22}$ kg.

a) En el sistema Tierra-Luna, la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y la Luna **proporciona la fuerza centrípeta** necesaria para mantener a la Luna en su órbita: $F_{gravitatoria} = F_{centrípeta}$ →

$G\cdot\frac{M_T\cdot M_L}{R^2} = M_L\frac{v^2}{R}$ → v = $\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot\ 5{,}97\cdot10^{-11}}{3{,}84\cdot10^{8}}}$ = **1018,3 m/s = V**

b) El periodo es el tiempo T que tarda en dar una vuelta completa (2πr) → T = $\frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi\cdot3{,}84\cdot10^{8}}{1018{,}3}$ = $2{,}37\cdot10^{6}$ s = **27,4 días**

c) $E_{c\,Luna} = ½\,M_L\cdot V_L^2 = ½\ 7{,}35\cdot10^{22}\cdot1018{,}3^2$ = **$3{,}81\cdot10^{28}$ J =$E_{C\,Luna}$**

d) $E_m = E_c + E_p = ½\,M_L\cdot V_L^2 + \left(-\frac{GM_T.\,M_L}{R}\right) = 3{,}81\cdot10^{28} + \left(-\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot7{,}35\cdot10^{22}}{3{,}84\cdot10^{8}}\right) = 3{,}81\cdot10^{28} - 7{,}62\cdot10^{28}$

$E_m = -3{,}81\cdot10^{28}$ J

Nota: En una órbita circular, el valor de la energía mecánica es **numéricamente igual al valor de la energía cinética, pero con signo opuesto** o la mitad de la energía potencial con su signo (negativo).

5) Galileo observó las lunas de Júpiter en 1610. Descubrió que Ío, el satélite más cercano a Júpiter que pudo observar en su época, poseía un período orbital de 1,8 días y el radio de su órbita era aproximadamente 3 veces el diámetro de Júpiter. Así mismo, encontró que el período orbital de Calixto (la cuarta luna más alejada de Júpiter) era de 16,7 días. Con estos datos, suponiendo órbitas circulares y utilizando que el radio de Júpiter es de 7.15 10^7 m, calcular:

a) La masa de Júpiter.

b) El radio de la órbita de Calixto.

a) $G \cdot \frac{M_J \cdot m_{ío}}{R^2} = m_{ío}\frac{V^2}{R}$; como v= 2πR/T → $G \cdot \frac{M_J \cdot m_{ío}}{R^2} = m_{ío}\frac{4\cdot\pi^2}{T^2}R$ → $M_J = \frac{4\cdot\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2}$

$M_J = \frac{4\cdot\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\pi^2\cdot(7{,}15\cdot10^7)^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(1{,}8\cdot24\cdot3600)^2}$ = **$2\cdot10^{27}$ kg = M_J**

b) Aplicando la 3ª Ley de Kepler: $T^2 = r^3$ → aplicándola a Ío y a Calixto y dividiendo una por otra obtenemos:

$\frac{T_{Io}{}^2}{T_{Calixto}{}^2} = \frac{r_{Io}{}^3}{r_{Calixto}{}^3}$ → $r_{Calixto} = r_{Io}\sqrt[3]{\frac{T_{Calixto}{}^2}{T_{IO}{}^2}} = 7{,}15\cdot10^7\cdot\sqrt[3]{\frac{16{,}7^2}{1{,}8^2}}$ → **r_{Io} = $1{,}9\cdot10^9$ km**

6) Un pequeño satélite, de 1500 kg de masa, describe una órbita circular alrededor de Marte, a una altura de 5000 km sobre su superficie.

DATOS: Masa de Marte: M_M = $6{,}4.10^{23}$ kg Radio de Marte: R_M = 3390 km

a) Calcular el período del movimiento del satélite.

b) Calcular la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la energía total del satélite.

c) ¿Cuánto pesaría el satélite en la superficie de Marte? ¿Y en la superficie de la Tierra?

a) La fuerza gravitatoria actúa como fuerza centrípeta del movimiento del satélite.

$G \cdot \frac{M\cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R}$ → $v = \sqrt{\frac{G\cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,6{,}4\cdot10^{23}}{(3390+5000)\cdot10^3}}$ el radio de la órbita es $r_{Marte} + h_{órbita}$ → $v_{órbita}$ = 2255,6 m/s

$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot8390\cdot10^3}{2255{,}6} = 23371$ s → **T = 6,5 h**

b) $E_c = ½\, m\cdot v^2_{órbita} = ½\; 1500\cdot2255{,}6^2$ = **$3{,}82\cdot10^9$ J = E_c**

$E_p = -G\frac{M\cdot m}{r} = -6{,}67\cdot10^{-11}\frac{6{,}4\cdot10^{23}\cdot1500}{8390\cdot10^3} = $ **$-7{,}63\cdot10^9$ J = E_p**

$E_m = E_c + E_p = 3{,}82\cdot10^9 + (-7{,}63\cdot10^9)$ = **$-3{,}82\cdot10^9$ J = E_p**

c) Calculamos primero la gravedad en Marte: $g = G\frac{M}{r^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\frac{6{,}4\cdot10^{23}}{(3{,}39\cdot10^6)^2} = 3{,}7\ m/s^2$

P = m·g = 1500·3,7 = **5550 N = P_{Marte}**

Para el caso de la Tierra = 1500·9,8 = **14700 N = P_{Tierra}**

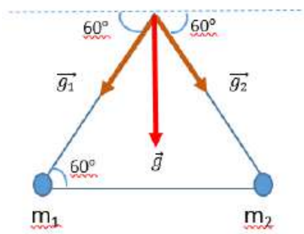
7) a) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifique la respuesta: "Si en un punto del espacio la intensidad del campo gravitatorio creado por varias masas es nulo, también lo será el potencial gravitatorio". b) Dos cuerpos, de 10 kg de masa, se encuentran en dos de los vértices de un triángulo equilátero, de 0,6 m de lado.

i) Calcule el campo gravitatorio que estas dos masas generan en el tercer vértice del triángulo.

ii) Calcule el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria de las dos masas para traer otro cuerpo de 10 kg desde el infinito hasta el tercer vértice del triángulo. DATO: G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) Es una afirmación FALSA.

El campo gravitatorio es una magnitud vectorial mientras que el potencial gravitatorio es escalar, lo que explica por qué pueden comportarse de manera independiente. Cuando varias masas crean campos gravitatorios en un punto, estos se suman vectorialmente, pudiendo cancelarse mutuamente y resultar en campo nulo. Sin embargo, los potenciales gravitatorios se suman algebraicamente, y como cada masa contribuye siempre con un valor negativo (-GM/r), la suma total será diferente de cero y negativa.



b) i) Por el principio de superposición $\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = -\frac{G\cdot M_1}{r^2{}_1}\overrightarrow{u_{r1}} - \frac{G\cdot M_1}{r^2{}_{12}}\overrightarrow{u_{r2}}$

Calculemos primero los módulos de g_1 y g_2 que son iguales:

$g_1 = g_2 = -\frac{G\cdot M}{r^2} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot10}{0{,}6^2} = 1{,}85\cdot10^{-9}$

Y ahora las descomponemos en sus componentes x e y ($\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$)

$g_{1x} = g_1\cos60º = 9{,}25\cdot10^{-10}$

$g_{1y} = g_1\text{sen}60º = 1{,}6\cdot10^{-9}$ → $\vec{g_1} = -9{,}25\cdot10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot10^{-9}\,\vec{\jmath}$

Teniendo en cuenta que $|g_1| = |g_2|$ y el sentido de las componentes de las fuerzas $\vec{g_1}$ y $\vec{g_2}$ tenemos:

$\vec{g_1} = -9{,}25\cdot10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot10^{-9}\,\vec{\jmath}$ $\quad\quad$ $\vec{g_2} = 9{,}25\cdot10^{-10}\,\vec{\imath} - 1{,}6\cdot10^{-9}\,\vec{\jmath}$

Por tanto: $\vec{g} = \vec{g_1} + \vec{g_2} = \boldsymbol{-3{,}2\cdot10^{-9}\,\vec{\jmath} = \vec{g}}$

ii) El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria ($W_{gravedad}$) para traer un cuerpo desde el infinito hasta un punto es igual al negativo del cambio en la energía potencial gravitatoria.

$W_{F_g} = -\Delta E_{p_g} = -\left(E_{p_{g0}} - E_{p_{g\infty}}\right) = -E_{p_{g0}}$ Ya que se define la energía potencial en el infinito como cero.

$E_{p_{g0}} = E_{p_{g1}} + E_{p_{g2}}$ y como $ambas\ son\ igual = -2\frac{GMm}{r} = -2\cdot\frac{6{,}67\cdot10^{-11}}{0{,}6}\,10\cdot10 =$ -$2{,}22\cdot10^{-8}$ J = Ep_{g0}

Como vimos al inicio de este apartado, trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es **W_{Fg} = -Ep_{g0} = $2{,}22\cdot10^{-8}$ J**

8) Se desea situar un satélite de 100 kg de masa en una órbita circular a 100 km de altura alrededor de la Tierra. (a) Determine la velocidad inicial mínima necesaria para que alcance dicha altura; (b) una vez alcanzada dicha altura, calcule la velocidad que habría que proporcionarle para que se mantenga en órbita. G = $6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; M_T = $5{,}98\cdot10^{24}$ kg ; R_T = 6370 km.

a) Situación 1: al salir r = 6370 km y v = v_1

Situación 2: a 100 km de altura → **r = R_T + h = 6370 + 100 = 6470 km** y su velocidad al llegar será **v_2 = 0**.

Aplicando conservación de la energía mecánica:

$$E_{m1} = E_{m2} = \frac{1}{2}mv^2{}_1 - \frac{GMm}{R_T} = -\frac{GMm}{R_T+h}\ \ (en\ 2\ v_2 = 0) \Rightarrow v^2{}_1 = 2\cdot\left(\frac{GM}{R_T} - \frac{GM}{R_T+h}\right) = \mathbf{1390\ m/s = v_1}$$

Para que se mantenga en órbita → Fc = Fg → $m\,\frac{v^2}{R_T+h} = G\,\frac{M\cdot m}{(R_T+h)^2}$ → v = $\sqrt{\frac{GM}{(R_T+h)}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6470\cdot10^3}}$ = **7852 m/s**

9) Razona la diferencia entre velocidad de escape y velocidad orbital

El concepto clave es la **energía mecánica total** (E_{total} = Ec + Ep) del satélite.

Velocidad de escape (V_{escape}): Un objeto que se mueve a la velocidad de escape tiene la energía cinética necesaria para que su energía total sea cero ($E_{total} = 0$). Con esta energía, puede liberarse por completo de la atracción gravitatoria del planeta y llegar al infinito con velocidad cero.

$E_{total} = ½\, mv^2_{escape} – GMm/r = 0$

Despejando: $\mathbf{V_{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$

Velocidad orbital ($V_{orbital}$): Un satélite en una órbita circular tiene una energía total **negativa** ($E_{total}<0$), lo que significa que está ligado al planeta. Su velocidad es la justa para mantenerse en una trayectoria estable.
$E_{total} = ½\, mv^2_{escape} – GMm/r < 0$

La fuerza centrípeta proporcionada por la gravedad nos da la velocidad orbital:

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2{}_{orbital}}{r} \Rightarrow v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

La comparación:

Comparando las dos velocidades, vemos que la velocidad de escape es $\sqrt{2}$ veces la velocidad orbital en la misma posición: $V_{escape} = \sqrt{2}\cdot V_{orbital}$

Esto significa que, para una órbita circular, la velocidad de escape siempre es mayor que la velocidad orbital. Si un satélite alcanzara la velocidad de escape en su órbita, no se quedaría orbitando, sino que se alejaría del planeta.

10) Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio 3 RT. a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre. b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria. G = 6,67 ·10^{-11} N m$_2$ kg^{-2} ; M$_T$ = 6,0 ·10^{24} kg ; R$_T$ = 6400 km.

a) Un satélite en órbita está sometido solo a la fuerza de atracción de la Tierra:

$F_{g\ órbita} = \frac{GMm}{r^2}$ y como el radio de la órbita es $3R_T$ ⇨ $F_{g\ órbita} = \frac{GMm}{(3R_T)^2} = \frac{F_{superficie}}{9}$ ⇨ **1/9 del peso en Tierra**

$P_{en\ Tierra}$ =1200·9,8= 11760 N → 11760/9 = 1307 N = $P_{en\ órbita}$ disminuye 11760 – 1307 = **10.453 N disminuye**

b) $V_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{3\cdot 6400\cdot 10^3}} =$ **4565,5 m/s = $V_{orbital}$**

Si es geoestacionaria su periodo orbital debe ser 24 h. Veamos su periodo:

$v_{órbita} = 2\pi r/T$. → $T = 2\pi r/V_{órbita} = 2\pi\cdot(3\cdot 6400\cdot 10^3)/4565{,}5 = 26410$ s → **7,34 h No es geoestacionaria**

11) Un satélite natural, de 8·10^{10} kg de masa, gira en una órbita circular a una altura de 800 km sobre la superficie de un cierto planeta P, cuyos datos se proporcionan debajo.
a) Hallar el periodo orbital del satélite.
b) Hallar la energía total del satélite.
c) Hallar el valor del campo gravitatorio en la superficie del planeta.
DATOS: Masa del planeta P: M_P = 5·10^{25} kg. Radio del planeta R_p = 2·10^4 km.

a) $F_{gravitatoria} = F_{centrípeta} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \rightarrow v_{orbital} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, 5 \cdot 10^{25}}{(20000+800) \cdot 10^3}}$ = 12662 m/s

El periodo de un movimiento circular es T =2πr/$v_{orbital}$ = 2π·(20000 + 800)·10^3/12662 = 10321 s → **2,87 h = T**

b) Ec = ½ $mv^2_{orbital}$ = ½ 8·10^{10}·12662 = 6,4·10^{18} J

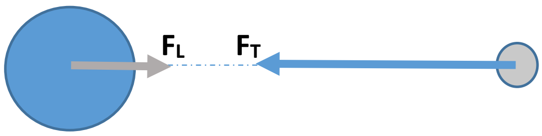
Ep = - GMm/r = -6,67·10^{-11}·5·10^{25}·8·10^{10}/2·10^7 = -1,3·10^{19} J

Em = Ec + Ep = 6,4·10^{18} - 1,3·10^{19} = **- 6,6·10^{18} J = Em**

c) Aceleración de la gravedad en el planeta: $g = G\frac{M}{r^2}$ = 6,67·10^{-11} $\frac{5 \cdot 10^{25}}{(2 \cdot 10^7)^2} =$ $\mathbf{8{,}34\ m/s^2}$ **= g**

12) La Luna describe una órbita casi circular en torno a la Tierra en 27,3 días
a) Dibuja las fuerzas que actúan sobre la Luna y sobre la Tierra, suponiendo que estuvieran aisladas en el Universo.
b) Calcular la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna
c) El valor de la masa de la Luna sabiendo que una partícula de masa m, podía estar en equilibrio en un punto alineado entre los centros Tierra - Luna y a una distancia de 3,4 · 10^8 m de la Tierra.
Datos: G=6,67·10^{-11} unidades SI; Masa de la Tierra; M_T=5,98·10^{24} kg

a)



b) $F_{gravitatoria} = F_{centrípeta} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

Y como el periodo de revolución es $T = 2\pi r/v$ → v = 2πr/T y sustituyendo en la ecuación anterior:

$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{4\pi^2\, r}{T^2}$ eliminando m y despejando T^2 obtenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} \cdot r^3$$

Esta es la expresión de la 3ª Ley de Kepler que se podría haber aplicado directamente, pero no es conveniente aprender tantas fórmulas de memoria, lo importante es saber cómo llegar a ellas.

$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} \cdot r^3 \rightarrow r^3 = \frac{GM_T T^2}{4\pi^2} = \sqrt[3]{\frac{(6.67\times10^{-11})(5.97\times10^{24})(2.36\times10^6)^2}{4\pi^2}}$ = **3,83·10^8 km = r**
Distancia entre centros de la Tierra y la Luna

c) La condición de equilibrio es: **$F_T = F_L$** → $G\frac{M_T\, m}{r^2{}_T} = G\frac{M_L\, m}{r^2{}_L}$

o bien **$g_T = g_L$** → $G\frac{M_T}{r^2{}_T} = G\frac{M_L}{r^2{}_L}$

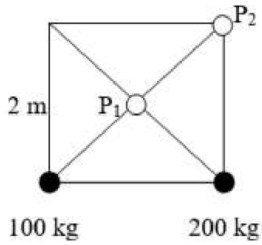
siendo $r_T = 3{,}4 \cdot 10^8$ m (dato del problema) y $r_L = 3{,}83 \cdot 10^8$ (resultado de b))- $3{,}4 \cdot 10^8$ m = $0{,}43 \cdot 10^8$ m

Que despejando M_L obtenemos $M_L = M_T \frac{r^2{}_L}{r^2{}_T} = (5{,}97 \cdot 10^{24})\frac{(0{,}43\cdot 10^8)^2}{(3{,}4\cdot 10^8)^2}$ = **$9{,}55\cdot 10^{23}$ kg = M_L**

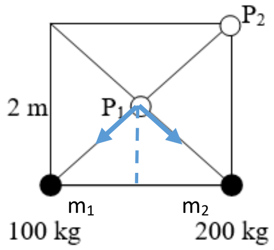
13) Del esquema de la figura:

a) Calcular el vector intensidad de campo en el punto P_1 y su módulo.

b) Trabajo necesario para llevar una masa de 50 kg desde el punto P_1 al punto P_2



a)



La distancia m_1 a P_1 es $\sqrt{2}$ ($\sqrt{1^2+1^2}$) que es igual a la de m_2 a P_1

Posición Masa 1 (100 kg) en (0, 0)

Posición Masa 2 (200 kg) en (2, 0)

Campo de m_1 sobre P_1

Vector de posición de m_1 a P_1: $r_1 = (1\hat{i} + 1\hat{j})$ m.

Vector unitario: $\hat{u}_1 = \frac{r_1}{r} = \frac{(1\hat{i}+1\hat{j})}{\sqrt{2}}$.

$g_1 = -G\frac{m_1}{r^2}\hat{u}_1 = -(6.67\cdot 10^{-11})\frac{100}{(\sqrt{2})^2}\frac{(1\hat{i}+1\hat{j})}{\sqrt{2}}$

$g_1 = -(3.335\cdot 10^{-9})\frac{(1\hat{i}+1\hat{j})}{\sqrt{2}} = (-2.36\cdot 10^{-9}\hat{i} - 2.36\cdot 10^{-9}\hat{j})\, N/kg$

Campo de m_2 sobre P_1

Vector de posición de m_2 a P_1: $r_2 = (1-2)\hat{i} + (1-0)\hat{j} = (-1\hat{i} + 1\hat{j})$ m.

Vector unitario: $\hat{u}_2 = \frac{r_2}{r} = \frac{(-1\hat{i}+1\hat{j})}{\sqrt{2}}$.

$g_2 = -G\frac{m_2}{r^2}\hat{u}_2 = -(6.67\cdot 10^{-11})\frac{200}{(\sqrt{2})^2}\frac{(-1\hat{i}+1\hat{j})}{\sqrt{2}}$

$g_2 = -(6.67\cdot 10^{-9})\frac{(-1\hat{i}+1\hat{j})}{\sqrt{2}} = (4.72\cdot 10^{-9}\hat{i} - 4.72\cdot 10^{-9}\hat{j})\, N/kg.$

Campo total en P_1

$g_{total} = g_1 + g_2 = (-2.36\cdot 10^{-9}\hat{i} - 2.36\cdot 10^{-9}\hat{j}) + (4.72\cdot 10^{-9}\hat{i} - 4.72\cdot 10^{-9}\hat{j}$

$$g_{total} = (2.36\cdot 10^{-9}\hat{i} - 7.08\cdot 10^{-9}\hat{j})\, N/kg.$$

Módulo del campo:

$|g_{total}| = \sqrt{(2.36\cdot 10^{-9})^2 + (-7.08\cdot 10^{-9})^2} = \sqrt{5.57\cdot 10^{-18} + 5.01\cdot 10^{-17}} =$ **$7{,}46\cdot 10^{-9}$ N/kg**

b) El trabajo necesario para mover una masa (m=50kg) entre dos puntos es igual al cambio en la energía potencial gravitatoria del sistema.

$W = \Delta Ep = Ep_{final} - Ep_{inicial} = Ep_{P2} - Ep_{P1}$

La energía potencial gravitatoria en un punto es la suma de las energías potenciales generadas por cada masa sobre el cuerpo que se mueve.

$E_p = -G\frac{M_1 m}{r_1} - G\frac{M_2 m}{r_2}$

Energía potencial P_1

Distancia de m_1 a P_1: $r_1 = \sqrt{2}$ m.

Distancia de m_2 a P_1: $r_2 = \sqrt{2}$ m.

$E_{p,P1} = -G\frac{(100)(50)}{\sqrt{2}} - G\frac{(200)(50)}{\sqrt{2}} = -\frac{G}{\sqrt{2}}(5000 + 10000) = -\frac{15000G}{\sqrt{2}}$

$E_{p,P1} = -(1.06 \cdot 10^4)(6.67 \cdot 10^{-11}) = -7.07 \times 10^{-7}\, J.$

Energía potencial P_2

El punto P_2 está en (2, 2).

Distancia de m_1 a P_2: $r_1 = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ m.

Distancia de m_2 a P_2: $r_2 = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4} = 2$ m.

$E_{p,P2} = -G\frac{(100)(50)}{2\sqrt{2}} - G\frac{(200)(50)}{2} = -G(\frac{5000}{2\sqrt{2}} + \frac{10000}{2}) = -G(1768 + 5000)$

$E_{p,P2} = -6768G = -6768(6.67 \cdot 10^{-11}) \approx -4.51 \times 10^{-7}\, J.$

Trabajo necesario

$W = E_{p,P2} - E_{p,P1} = (-4.51 \times 10^{-7}\, J) - (-7.07 \times 10^{-7}\, J)$ = **$2{,}56 \cdot 10^{-7}$ J**

14- A una altura de $1{,}5 \cdot 10^4$ km sobre la superficie terrestre, se mueve un satélite artificial de 500 kg, siguiendo una órbita circular.

a) Calcular la velocidad y la energía total que debe llevar dicho satélite para que no caiga sobre la superficie terrestre.

b) ¿Qué energía cinética mínima sería necesario comunicarle al satélite para que se alejara definitivamente de la Tierra?

Datos: La $M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². y $R_T = 6370$ km.

a) $F_{gravitatoria} = F_{centrípeta} \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{(6370 + 1{,}5 \cdot 10^4) \cdot 10^3}} =$ **4324 m/s**

$E_{total} = E_{mecánica} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$ podemos sustituir valores o sustituir $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

quedando $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}\, 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 500}{(6370 + 1{,}5 \cdot 10^4) \cdot 10^3} =$

$E_m = -4{,}68 \cdot 10^9$ J

b) La energía total actual del satélite es $-4{,}68 \cdot 10^9$ J, esta energía es la conocida como energía de enlace o ligadura con la que el campo gravitatorio mantiene mantiene al satélite en la órbita. Para salir de ella poder alejarse definitivamente de la Tierra los motores del satélite deben proporcionar al menos esa misma cantidad de energía: $E_c = 4{,}68 \cdot 10^9$ J

15) Un satélite de 600 kg gira en órbita circular a 5.000 m/s. Calcular; a) distancia a la que se encuentra sobre la superficie de la Tierra. b) Periodo. C) Energía que hay que suministrar para que su órbita pase a 9.000 km de altura. Datos: La $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m²·kg⁻². y $R_T = 6370$ km.

a) Para un satélite en órbita circular, la fuerza gravitatoria (Fg) es la que proporciona la fuerza centrípeta (Fc).

$F_g = F_c \rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \rightarrow r = \frac{GM}{v^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \frac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{5000^2} \rightarrow r = 1{,}5944 \cdot 10^7$ m pero recordemos que r = R + h →

$1{,}5944\cdot10^7 = 6370\cdot10^3 + h \rightarrow h = 9{,}574\cdot10^6$ m → **9.574 km de altura**

b) El periodo es $T = 2\pi r/v = 2\pi\cdot1{,}5944\cdot10^7/5000 = 20035$s → **5,57 h**

c) Veamos la E_m de la órbita inicial:

$E_{mecánica} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right)$ podemos sustituir valores o sustituir $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

quedando $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{r}\right) = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot600}{1{,}5944\cdot10^7} = -7{,}49\cdot10^9$ J

Veamos E_m en la órbita de 9000 km altura → r = R + h = 6370 km + 9000 km = 15370 km = $1{,}537\cdot10^7$ m

Aplicamos directamente $E_m = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{5{,}97\cdot10^{24}\cdot600}{1{,}537\cdot10^7} = -7{,}78\cdot10^9$ J

$\Delta E = E_{final} - E_{inicial} = -7{,}78\cdot10^9 - (-7{,}49\cdot10^9) =$ **$-2{,}9\cdot10^8$ J**

Interpretación: ΔE<0, es decir **la energía total disminuye** al pasar de la órbita actual (9574 km) a la de 9000 km. Por tanto, **no hay que suministrar** energía, sino que hay que *extraer* (disipar) energía del satélite: se liberan aproximadamente $2{,}9\cdot10^8$ J, mediante una maniobra de frenado, reduciendo la velocidad (*en la realidad es un proceso más complejo que se conoce como maniobra de Hohmann que tiene dos etapas que incluye un modo de órbita elíptica*).

16) Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción hacia la Tierra a lo largo de media órbita? b) Si la órbita fuera elíptica ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita completa?

El trabajo realizado por la fuerza de atracción gravitatoria a lo largo de media órbita es cero.

Esto se debe a que la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra siempre apunta hacia el centro de la órbita (radialmente hacia adentro), mientras que el desplazamiento del satélite es siempre tangente a la órbita. Por lo tanto, el vector de fuerza (F) y el vector de desplazamiento (dr) son siempre perpendiculares entre sí en cada instante.

$$dW=F\cdot dr=|F|\cdot|dr|\cdot\cos\alpha$$

Como el ángulo α entre la fuerza y el desplazamiento es 90◦, y cos(90◦)=0, el trabajo en cada instante es cero. Por lo tanto, el trabajo total a lo largo de cualquier tramo de la órbita, incluyendo media órbita, es cero.

El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria a lo largo de una órbita elíptica completa es cero.

La fuerza gravitatoria es una **fuerza conservativa**. Por definición, el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de cualquier camino cerrado (es decir, que empieza y termina en el mismo punto) es nulo.

Dado que una órbita elíptica es un camino cerrado (el satélite regresa a su punto de partida después de una vuelta completa), el trabajo total de la fuerza gravitatoria a lo largo de una órbita completa debe ser cero. Esto se puede demostrar con el teorema de la conservación de la energía, ya que si el trabajo total fuera diferente de cero, la energía cinética del satélite al final de la órbita sería distinta a la inicial, lo que violaría la conservación de la energía mecánica.

Una respuesta mucho más corta:

Para órbitas circulares, la velocidad es constante, por lo que la energía cinética no cambia (ΔK=0), lo que implica que el trabajo realizado por la gravedad es cero (W=0), ya sea en una órbita completa como en media o un tercio de órbita.

En órbitas elípticas completas, el trabajo total también es cero porque la fuerza gravitacional es conservativa y el sistema vuelve a su punto inicial.

17) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. a) ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape? b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.

a) Las expresiones de ambas velocidades son: $v_{orb}=\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T+h}}$ y $v_{escape}=\sqrt{\frac{2G\cdot M_T}{R_T+h}}$

por lo que $\boldsymbol{v_{escape}=v_{orb}\cdot\sqrt{2}}$

b) No, en la expresión $E_p = -G\frac{m\cdot M_T}{R_{T+h}}$ al aumentar h, disminuye el valor numérico de la energía potencial, pero al ser esta negativa su valor real aumenta.

18) Se lanza un satélite artificial desde la superficie de un planeta, verticalmente y con una velocidad de 20 km/s. La masa del planeta es dos veces la masa de la Tierra y su radio la mitad del radio terrestre. Calcule: a) La velocidad de escape del planeta ¿Se escapa el satélite artificial de dicho planeta? b) Si en el momento del lanzamiento el satélite tiene una energía cinética de 10^{11} J, calcule su masa y la fuerza que ejerce el planeta sobre él. c) Admitiendo que el satélite queda ligado al planeta en una órbita circular, y recordando que fue lanzado con una velocidad de 20 km/s, calcule el radio de dicha órbita.
Datos: G=$6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_{Tierra}=5{,}98\cdot10^{24}$ kg; R_{Tierra}= 6370 km.

a) $V_{lanzamiento}$ = 20km/s = 20.000m/s R_p = 26370/2 = 3185 km $M_p = 2\cdot5{,}98\cdot10^{24} = 1{,}196\cdot10^{25}$ kg

$$v_{escape}=\sqrt{2G\frac{M_p}{R_p}}=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\frac{1{,}196\cdot10^{25}}{3{,}185\cdot10^{6}}}=\mathbf{22381{,}5\ m/s}=\boldsymbol{v_{escape}}$$

V_{escape}= 22.381,5 m/s > 20.000 m/s ⇨ el satélite no escapa de la atracción gravitatoria.

b) Conociendo la E_c y la velocidad en el momento del lanzamiento:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2\ \rightarrow\ 10^{11}=\frac{1}{2}\,m20000^2\rightarrow\boldsymbol{m=500\ kg}$$

La fuerza gravitatoria del planeta:

$$F_g=G\frac{M_pm}{{R_p}^2}==6{,}67\cdot10^{-11}\frac{1{,}196\cdot10^{25}\cdot500}{(3{,}185\cdot10^{6})^{2}}=\mathbf{3{,}93\cdot10^4\ N=F_g}$$

c) Teniendo en cuenta que en un satélite en órbita: $F_{gravitatoria}=F_{centrípeta}\rightarrow G\cdot\frac{M\cdot m}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\rightarrow v^2=\frac{GM}{r}$

Y, como dice el apartado, *“Admitiendo que el satélite queda ligado al planeta en una órbita circular, y recordando que fue lanzado con una velocidad de 20 km/s, calcule el radio de dicha órbita.”*

$$20000^2=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}1{,}196\cdot10^{25}}{r}\rightarrow\mathbf{r=2000\ km}$$

19) El Instituto de Astrofísica de Canarias (IAC) con el apoyo del Cabildo de Tenerife, pondrá en órbita, entre 2026 y 2027, una red de 8 satélites, de entre 20 y 30 kg, en órbitas de baja altura (LEO) entre 450 y 700 kilómetros, con una vida útil para cada uno de unas 20.000 vueltas alrededor del planeta a) ¿Cuál es el tiempo de menor y mayor vida útil de esos satélites expresado en años? b) ¿cuál sería el satélite con mayor energía mecánica y cuál sería su valor?
Datos: G=6,674·10^{-11} N m^2 kg^{-2}; M$_{Tierra}$=5,972·10^{24} kg; R$_{Tierra}$= 6371km.

a) Para ver la vida útil debemos conocer el periodo de los satélites. Para ello hay dos opciones, calcular la velocidad según la altura igualando la $F_{centrípeta}$ con la $F_{gravitatoria}$ y una vez que tenemos la V aplicamos T=2πr/v. La otra opción es aplicar la fórmula del periodo T si la conocemos:

$$F_c = F_g \rightarrow m\frac{v^2}{r} = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad \text{y como } T = \frac{2\pi r}{V} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Veamos en la órbita baja (450 km). Recordemos que r = R$_T$ + h → r = 6371 + 450 = 6821 km = 6,821·10^6 m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(6{,}821\cdot 10^6)^3}{6{,}674\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}972\cdot 10^{24}}} = 5564 \text{ s}$$ Como dura 20.000 vueltas ⇨ 5564·20.000 = 1,1128·10^8 s

⇨ **3,53 años**

Repetimos los mismos pasos para la **órbita de 700 km** y obtenemos **3,75 años**

b) El satélite con la mayor energía mecánica será el de mayor masa a mayor altura.

La Em es la suma de la Ec + la Ep. Para una órbita circular la fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta:

$$F_g = F_c \rightarrow G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

Sustituyendo v^2 en la fórmula de la energía cinética obtenemos: $E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) = \frac{GMm}{2r}$

La energía mecánica es la suma de ambas:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

La energía mecánica es siempre negativa. Cuanto más cerca de cero es su valor (menos negativa) mayor es la energía. Esto significa que la órbita con el radio más grande tendrá la mayor energía mecánica.

La masa del satélite (m) en la fórmula de la energía mecánica es un factor multiplicativo que hace la energía más o menos negativa. Para encontrar el valor de energía **mayor** (menos negativo), debemos usar el **valor más pequeño de la masa** del satélite, que es 20 kg, en la órbita de mayor altura (700 km).

$$E_m = -\frac{GMm}{2r} = -\frac{6{,}674\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}972\cdot 10^{24}\cdot 24}{2\cdot 7{,}071\cdot 10^6} = \mathbf{E_m = -1{,}88\cdot 10^8\ J}$$

El satélite con la **mayor energía mecánica** es el que se encuentra en la órbita de **mayor altura (700 km)** y con la **menor masa (20 kg)**. Su valor de energía mecánica es aproximadamente −1.88×10^8 J.